中國人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

长寿风险下家庭资产配置和风险管理

报告人：李云龙

日期：2021年10月13日

第一部分

INTRODUTCTION AND LITERATURE

研究背景与文献介绍

研究背景

- 长寿风险：从出现风险到管理风险
- 精算发展的趋势：从一维到多维，从个人到家庭

  寿险的发展：从单一个体到联合生命保险、联合年金

  死亡率的发展：从单一个体，单一国家到多个体，多国家/地区

- 怎么定义家庭？一代人，两代人
- 怎么定义家庭的长寿风险风险？
- 家庭能做什么来控制风险？

参考文献概述

决策时间/对象	同代人（夫妻）	隔代人（父子/父女）
退休前开始决策	6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)	3. LIFE ANNUITY INSURANCE VERSUS SELF-ANNUITIZATION: ANANAL YSISFROM THEPERSPECTIVE OF THE FAMILY（Schme-iser and Post， 2005） 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family?（Post & Gründl, 2006）
退休后开始决策	1.JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999） 2.Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）	5. Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard （Zweifel，2020）

决策时间/对象	同代人（夫妻）	隔代人（父子/父女）
退休前开始决策	6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)	3. LIFE ANNUITY INSURANCE VERSUS SELF-ANNUITIZATION: ANANAL YSISFROM THEPERSPECTIVE OF THE FAMILY（Schme-iser and Post， 2005） 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family?（Post & Gründl, 2006） 5. Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard （Zweifel，2020）
退休后开始决策	1.JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999） 2.Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）	

第二部分

从退休后开始决策的同代人情形

- JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999）
- This paper explores the value of purchasing joint life annuities for married couples. It describes the existing market for joint life annuities, and summarizes the range of annuity products that are currently available to couples. It then considers the value that married couples would place on access to an actuarially fair annuity market, and defines a measure of willingness-to-pay for annuities. This calculation differs from the analogous one for a single individual for two reasons. First, joint-and-survivor life tables differ from individual life tables. The life expectancy of the second-to-die in a married couple is substantially greater than that for a single individual. Second, joint life annuities provide time-varying payouts, because survivor benefit options permit the payout when both members of a couple are alive to differ from that when one member has died. The paper develops a new annuity valuation model and applies it to evaluate a married couple's utility gain from annuitization

- Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）
- The aim of this paper is to explain the annuities puzzle in greater depth by introducing the bequest motive. It will try to determine whether this motive really is a relevant feature influencing the demand for life annuities from married couples. With this aim in mind, we develop an optimization model of the utility provided by purchasing a life annuity with contingent survivor benefit or a joint survivor life annuity. Our model is based on that first put forward by Brown and Poterba (2000), to which we have added elements from other models which include the bequest motive. This will enable us to calculate the annuity equivalent wealth and the optimal percentage of wealth to annuitize in various contexts: the possibility of access to actuarially fair annuity markets and the assumption that couples already have part of their wealth in pre-existing life annuities. The bequest motive is found not to be a significant factor influencing the demand for annuities from couples.

Introduction

- 长寿风险是寿命超过预期造成的风险。
- 任何长寿风险研究都有两个基本问题：

（1）这种风险依赖于什么？

一般有五个因素需要考虑：初始财富、预期消费、死亡概率以及投资组合的回报和波动性。

（2） 这对退休人员来说是一个重要的风险吗？

在很多研究中，退休人员被认为具有出色的投资技能，交易成本通常不被考虑，关于回报和风险的假设往往是乐观的，这往往会导致风险被低估

- 这两篇文章关注的是夫妻（家庭）的长寿风险

（3）如何应对长寿风险？

第一个答案：年金

人寿年金是一种养老金，由保险公司销售，投保人缴纳（初始）保费，公司承诺在投保人去世前定期支付一定金额，从而承担年金受益人的长寿风险。

Introduction

- 当寿命存在不确定性时，年金在消费者选择理论中起着重要作用。
- Yaari（1965）认为，在没有遗赠动机的情况下，个人只持有年金资产会更好，或者是有遗赠动机的年金化和传统资产组合
- Mitchell、Poterba、Warshawsky和Brown（1999）发现，一个典型的65岁退休男性生命周期消费者会愿意放弃大约三分之一的财富，以进入精算公平的名义年金市场；对于具有合理risk aversion、死亡假设和无年金收入的消费者，购买年金可能会提高终身预期效用
- Milevsky和Robinson（2000）利用加拿大死亡率数据和金融市场的参数进行模拟，发现self-annuitization比voluntary annuitization提供更大的流动性；
- Albrecht和Maurer（2002）在评估德国市场风险时得出了类似的结论。他们计算了个人消费短缺的概率，并表明这是相当大的，特别是对于高进入年龄的人群。
- Huanget al.（2004）计算了在随机投资回报的情况下，固定退休消费策略将导致个体破产的概率。他们得出结论，如果这些基金投资于一个多元化良好的股票投资组合，65岁的退休人员需要30倍于预期年实际消费才能产生95%的可持续性概率。

Introduction

- Davidoffet al.（2005）表明，购买年金的最佳条件并不像Yaari（1965）规定的那样苛刻。如果金融市场是完整的，唯一的要求是不存在遗赠动机，且年金的预期回报率大于基准金融资产的回报率。
- 年金谜题：传统经济学理论认为，个人或者家庭对财富进行“完全年金化”能够显著的提高效用和福利水平，但在现实中，年金化水平却极度低下，这一理论与现实的矛盾成为年金谜题。
- 文献从消费者的角度对年金需求不足提出了几种解释：
- (1) The crowding-out effect of defined benefit systems 可能是最重要的原因。预年金化财富（ pre-annuitized wealth ）的存在为长寿风险提供了一定程度的保护。
- (2) The fact that the private annuity market is not ‘actuarially fair’。年金的价格较高，一部分是由于逆向选择（Walliser，2000b），其余部分是由于管理、税收和利润的间接成本。保险公司为了避免逆向选择和信息差，只能提高价格，但是这就导致一些消费者退出年金市场。

Introduction

- 文献从消费者的角度对年金需求不足提出了几种解释:

(3) Individuals use family self-insurance。这使他们能够在家庭成员之间分享资金，从而降低年金的吸引力。

(4) The perception of the accumulated retirement fund in the form of a lump sum allows the individual to face the appearance of unforeseen future expenditures.

(5)某些国家对不同类型的养老金征税的不同方式（并非总是有利于终身年金选择)

(6) 在一些国家年金是非常昂贵的家庭持有累积资产。许多家庭甚至负担不起养老金市场。（Lopes(2003)）

(7)消费者没有受到足够的教育来做出福利最大化的决定。

(8)遗赠动机

Introduction

这两篇文献主要针对（2）和（6）

- 私人年金市场：“个人账户”政策辩论的一部分，这是当前现收现付、DB型社会保障体系的替代方案。
- 核心问题：退休人员如何将个人账户中积累的资源分摊到该个体以及其配偶的余生中。
- 虽然已婚夫妇的待遇是社会保障计划设计中的一个重要问题，但大部分研究关注的都是个体的决策，只有少数研究关注了已婚夫妇的消费行为:
- Kotlikoff和Spivak（1981）重点关注已婚人士而非单身人士对个人年金的需求。这篇论文表明，已婚个人购买个人年金合同的收益要小于独立个人的收益。这一结果源于这样一个事实，即在年金市场中，家庭内部的风险分担是年金市场风险分担的部分替代品。
- Hurd（1999）的研究了夫妻双方都面临寿命不确定的情况下，已婚个体的最佳消费。

The Marketplace for Joint and Survivor Annuity Contract

- 这篇文章探讨了一对已婚夫妇私人年金需求相关的问题。
- 首先，介绍了两类目前可用的联合人寿年金产品，现有的年金产品比教科书上的的保费、单身年金要复杂得多，而且这些产品为已婚夫妇提供了更优质的资源分配选择。
- 要分析共同生活年金合同的作用，重要的是要认识到一对已婚夫妇的四个不同的状态. 一对做出理性财务决策的夫妇将寻求在这四个状态最优分配财富。
- 这里有两种主要类型的联合年金合同。第一种规定了一个每年/月/季度定期支付年金给存活的个体，在夫妻一方死亡后，将支付一部分赔偿金φ给遗属，称之为“joint and survivor annuity”

$S_{m,j}$表示对于一对购买年金的夫妇中，丈夫在购买年金后j期的存活概率。用类似的方式，定义$S_{f,j}$为他妻子在j期的存活概率。与joint and survivor annuity相关的保险费(P)的精算公平性方程为：

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \{A * S_{m,j} * S_{f,j} + \phi^* A^* \left(S_{f,j} * (1 - S_{m,j}) + S_{m,j} * (1 - S_{f,j})\right)\} / (1+i)^j$$

The Marketplace for Joint and Survivor Annuity Contract

- 第二种是joint life policy with a contingent survivor benefit（附带遗属抚恤金的联合人寿保险，contingent survivor annuity）。这种类型的policy的关键区别policy指定夫妇中的一名成员作为主要年金持有者（primary annuitant）。假如primary annuitant活着，年金支出为A/每期。但是，如果primary annuitant先于secondary annuitant死亡，payment将下降到primary annuitant支付额的一小部分θ。对于contingent survivor annuity，两名年金者死亡的顺序对benefit的时间分布很重要，因此配偶中的一方在遗属年金方面受到不对称的待遇。

假设丈夫是主要的年金领取者，定义contingent survivor annuity为:

$$P=\sum_{j=1}^{\infty}\{A*S_{m,j}+\theta*A*(1-S_{m,j})*S_{f,j}\}/(1+i)^{j}$$

文献1

- 其次，扩展了模型，指定了一个家庭效用函数，

$$U\left(C_t^m, C_t^f\right) = U_m\left(C_t^m + \lambda C_t^f\right) + \varphi U_f\left(C_t^f + \lambda C_t^m\right)$$

$$U_m\left(C_t^m, C_t^f\right) = \frac{\left(C_t^m + \lambda C_t^f\right)^{1-\beta}}{1-\beta} \text{ and } U_f\left(C_t^f, C_t^m\right) = \frac{\left(C_t^f + \lambda C_t^m\right)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

- 家庭不进入年金市场时： $\mathrm{W}_{t+1} = (\mathrm{W}_t - \mathrm{C^m}_t - \mathrm{C}_t^f)(1+r)$

$$M(W_t) = \max U\left(C_t^m\right) + \frac{\left(1-q_t^m\right) * M\left(W_{t+1}\right)}{(1+\rho)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{W}_t) = \max \mathrm{U_m}\left(\mathrm{C^m}_t + \lambda \mathrm{C}_t^f\right) + \varphi \mathrm{U_f}\left(\mathrm{C}_t^f + \lambda \mathrm{C^m}_t\right) + (1+\rho)^{-1}\left(1-\mathrm{q^m}\right)\left(1-\mathrm{q}^f\right)\mathrm{V}\left(\mathrm{W}_{t+1}\right) \\ +(1+\rho)^{-1}\left(1-\mathrm{q^m}\right)\mathrm{q^f}\mathrm{M}\left(\mathrm{W}_{t+1}\right) + (1+\rho)^{-1}\mathrm{q^m}\left(1-\mathrm{q^f}\right)\mathrm{F}\left(\mathrm{W}_{t+1}\right)\end{aligned}$$

$$F(W_t) = \max \varphi U\left(C_t^f\right) + \frac{\left(1-q_t^f\right) * F\left(W_{t+1}\right)}{(1+\rho)}$$

- 家庭进入年金市场时： $\mathrm{W}_{t+1} = (\mathrm{W}_t + \mathrm{A}_t' - \mathrm{C}_t^m - \mathrm{C}_t^f)(1+r)$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(\mathrm{W}_t; \mathrm{A_b}, \mathrm{A_m}, \mathrm{A}_f'\right) = \max \mathrm{U_m}\left(\mathrm{C}_t^m + \lambda \mathrm{C}_t^f\right) + \varphi \mathrm{U_f}\left(\mathrm{C}_t^f + \lambda \mathrm{C^m} t\right) \\ +(1+\rho)^{-1}\left\{\left(1-\mathrm{q^m}\right)\left(1-\mathrm{q^f}\right)\mathrm{V}\left(\mathrm{W}_{t+1}; \mathrm{A_b}, \mathrm{A_m}, \mathrm{A_f}\right) + \left(1-\mathrm{q^m}\right)\mathrm{q^f}\mathrm{M}\left(\mathrm{W}_{t+1}; \mathrm{A_m}\right) + \mathrm{q^f}\left(1-\mathrm{q^f}\right)\mathrm{F}\left(\mathrm{W}_{t+1}; \mathrm{A}'\right)\right\}\end{aligned}$$

文献2

- 遗赠动机
- 遗赠动机通常没有被纳入模型的原因之一很可能是为了保持模型分析的简单性。
- Benitez-Silva(2003)指出，这可能是由于对遗赠动机在个人是否购买年金决策中的相关性以及如何对遗赠因素建模缺乏共识。学界对于支持或者反对遗赠动机对年金决策的影响持有不同的观点：

支持	反对
1. Yaari(1965)指出，在生命周期框架下，如果消费者没有遗赠动机，只持有年金资产会更好;然而当他们有遗赠动机时，他们会持有年金和可遗赠资产的组合 2. Lewis(1989)扩展了Yaari的人寿保险框架，认为遗赠对消费的影响较为微弱。 3. Laitner和Juster(1996)认为遗赠动机确实会影响购买年金的决定 4. Friedman和Warshawsky(1990)得出结论，遗赠动机的存在会减少或消除对年金的需求，即使年金的回报超过了实际市场利率。 5. Friedman和Warshawsky(1988)指出，遗赠动机和保险公司提供的年金的精算不公平性之间的相互作用可能会阻止个人购买年金。 6. Jousten(2001)发现遗赠动机的存在对年金合同的估值具有很强的暗示作用 7. Lopes(2003)认为遗赠动机可以显著降低年金需求，可以看作是美国年金市场需求低的一个可能解释	1. Hurd(1987)认为遗赠动机对老年人的边际财务行为没有显著响。 2. Hurd(1989)又提供了进一步的支持，他发现许多遗赠显然是偶然的，因为死亡时间不确定，没有任何证据表明真正的遗赠动机。 3. Bernheim(1991)指出，如果退休人员可以在年金之外进行储蓄和购买额外的、每年可续保的人寿保险，那么遗赠动机不会导致福利产生重大差异 4. Brown（2001a)质疑遗赠动机在影响边际年金购买决策中的重要性——无论是子女的存在还是遗赠动机都不是终生年金购买决策的决定因素。 5. Vidal和Leja´raga(2004)得出结论，在一个引入了遗赠动机，并加入了已有年金的影响的个人生命周期模型中，很少有个人愿意购买年金

文献2

- 本文将分析年金化对期望效用的影响。需要考虑联合效用函数，以衡量由一对夫妇的消费优化所产生的期望效用。我们的模型是基于Brown和Poterba(2000)首先提出的模型，在此基础上我们添加了其他模型的元素，其中包括遗赠动机。
- 这篇论文关注的是这样一种情况:夫妻中至少有一方处于退休年龄，而且在购买养老金时没有子女作为受抚养人。
- 当退休的时候，夫妻俩必须决定如何分配他们积累的财富，以确保他们能够满足未来的消费需求。基本假设是:
- （1）这对夫妇可以将他们的全部财富分配到终身年金中。
- （2）有遗赠动机，但只考虑死亡时可能遗赠产生的效用。
- （3）没有考虑利率、死亡率有关的或通货膨胀率有关的其他类型的不确定性。
- 时间原因，我们只介绍了不进入年金市场的模型（关注遗赠效用是如何引入模型的）；进入年金市场的模型只是在此基础上进行调整（与文献1类似）。

文献2

- 模型

$$U_c\left(C_t^m, C_t^f\right) = U_m\left(C_t^m + \lambda C_t^f\right) + \varphi U_f\left(C_l^f + \lambda C_t^m\right)$$

假设夫妻无法进入年金市场，且他们重视留给继承人的遗赠的存在，则消费优化模型为

$$\max_{C} \sum_{t=1}^{T} \frac{\overbrace{U_c(C_t^m, C_t^f)S_t^m S_t^f}^{1} + \overbrace{U_m(C_t^m, 0)S_t^m \cdot (1-S_t^f)}^{2} + \overbrace{U_f(0, C_t^f)S_t^f \cdot (1-S_t^m)}^{3}}{(1+\delta)^t}$$

$$+ \overbrace{+h_t \frac{V(W_t)}{(1+\delta)^t} \cdot \underbrace{\left[S_{t-1}^m \cdot q_t^m \cdot (1-S_t^f) + S_{t-1}^f \cdot q_t^f \cdot (1-S_t^m) - S_{t-1}^m \cdot S_{t-1}^f \cdot q_t^m \cdot q_t^f\right]}_{5}}^{4} \tag{2}$$

h_t:夫妻在t时期所考虑的遗赠效用相对于该时期消费流所对应的期望效用的相对权重

$$\text{s.t. } W_{t+1} = (W_t - C_t^m - C_t^f)(1+r) \tag{3}$$

$$W_0 \geqslant \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t^m - C_t^f}{(1+r)^t} \geqslant 0,\ \forall t > 0 \tag{4}$$

决策时间/对象	同代人（夫妻）	隔代人（父子/父女）
退休前开始决策	6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)	3. LIFE ANNUITY INSURANCE VERSUS SELF-ANNUITIZATION: ANANAL YSISFROM THEPERSPECTIVE OF THE FAMILY（Schme-iser and Post， 2005） 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family?（Post & Gründl, 2006） 5. Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard （Zweifel，2020）
退休后开始决策	1.JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999） 2.Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）	

第二部分

从退休前开始决策的同代人情形

- 6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)
- This paper presents a technique to solve the problem where a couple aims to optimize their consumption, investment, and life-insurance purchasing strategies, thereby maximizing their family objective until retirement. Assumed correlated lifetimes of the two wage earners are modeled by using both the copula and common-shock models. Subsequently, closed-form solutions are obtained for determination of the optimal strategies in both the copula and a special case of the common-shock models. As observed, use of the copula model is more advantageous in its provision of closed-form strategies and ability to distinguish mortality impacts. The optimization problem considered herein is investigated under a Markovian setting and solved using the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. Numerical examples are also provided to illustrate the utility of the proposed optimization strategy

Introduction

- 在购买人寿保险时，个人或家庭面临着一个自然问题，即考虑到不同个人的某些人生目标，他们的财富在消费、投资和人寿保险购买方面的最佳分配

个人	家庭
1. Yaari（1956） 2. Hakanson（1969）使用离散模型研究了优化的终身消费、投资和人寿保险购买问题 3. Richard（1975）建立了涉及消费、投资组合的连续时间模型，对具有不确定寿命的个人购买人寿保险时的最优策略进行了讨论， 4. Moore和Young（2006）也使用连续时间模型进一步分析了个人保险策略的优化，并适当考虑了个人消费和遗赠动机。 5. Ye（2006）利用动态规划原理结合鞅方法，为具有不确定寿命的工薪阶层提供了一种消费、投资和人寿保险的优化策略。 6. Huang和Milevsky（2008）以及Huang et al.（2008）提出了通过将个人随机收入与风险资产相关联来解决消费、投资组合选择和人寿保险购买的最优策略问题	在一个由两名个体（夫妻或者其他）组成的家庭中，必须考虑其成员的死亡率相关性，已经有学者采用随机模型对个体的相关性进行了精算领域研究，如： 1. Marshall和Olkin（1967）讨论了多元指数分布的一些应用 2. Frees（1996）使用死亡率模型和coupla二元生存函数对多个体年金进行定价，发现与假定独立的标准模型相比，年金价值减少了约5%。 3. Luciano（2008）用随机死亡率模型研究夫妻的死亡风险，并用Archimedean copula捕捉个体间相关性 4. Ji（2011）建立了马尔可夫模型和半马尔可夫模型，用来测量以下三种相关关系:(1)由于灾难性事件而影响双方生活的瞬时相关关系，(2)配偶死亡的短期相关关系，(3)寿命之间的长期关联 5. Lee和Cha（2018）提出了一个通用的common shock模型来对夫妻寿命的相关性建模，并将其应用于寿险领域。

- 三个变化：决策时间（养老问题受到重视），连续时间模型和假设

Introduction

- 本研究考虑了一对夫妇的最佳消费和投资问题，
- 夫妻都是工薪阶层（平均工资水平），能够独立购买人寿保险，其伴侣被指定为受益人。
- 夫妻的寿命存在相关性，使用copula和common shock model建模。如果任何一方过早死亡，另一方将获得补偿死亡抚恤金，并继续消费和投资，直至其死亡。如果夫妻同时死亡，两人的死亡抚恤金将作为遗赠同时发放。
- 决策被认为是在一个固定期限[0，T]内做出的，T为个体的退休年龄，在T时刻前，夫妻都可以获得确定的劳动收入
- 鉴于其家庭的总体目标和不确定的个人寿命，本研究中考虑家庭旨在最大化消费、遗产和最终财富的加权效用。优化问题的控制变量包括：风险资产的总联合投资、两个个体的消费以及两个个体的人寿保险购买策略。
- 在夫妻任意一位去世之前确定了最佳策略，同时也要考虑一个个体死亡，其配偶存活的情况，此时由于领取死亡抚恤金，财富过程出现了跳跃。

Problem formulation

- 如前所述，"家庭"是指在金融和保险市场上管理家庭资产和获取退休前收入的夫妻。在他们的一生中，两个人都购买人寿保险，以对冲他们个人的死亡风险。本文认为两个人的消费模式是不同的，因此，他们的个人效用函数和死亡风险可以被解释：

$$F_i(t) := P(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(s)ds}$$

- (1) copula $F(t_1, t_2) = C(F(t_1), F(t_2))$
- (2) common shock model: $\tilde{\lambda}_0(t)$, $\tilde{\lambda}_1(t)$, and $\tilde{\lambda}_2(t)$

$$\tau_1 = \tilde{\tau}_1 \wedge \tilde{\tau}_0 \qquad \tau_2 = \tilde{\tau}_2 \wedge \tilde{\tau}_0.$$

$$P(\tilde{\tau}_i > t) = e^{-\int_0^t \tilde{\lambda}_i(z)dz}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Thus,

$$\lambda_i(t) = \tilde{\lambda}_0(t) + \tilde{\lambda}_i(t), \quad i = 1, 2.$$

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)\,dt,$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t),$$

$$\begin{aligned} dX_i(t) = {} & [r(t)X_i(t) + (\mu(t) - r(t))u_i(t) - c_i(t) \\ & -k_i(t) + I_i(t)]\,dt \\ & +\sigma(t)u_i(t)\,dW(t), \qquad t \in [0, \tau_i \wedge T]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Define the household wealth as $X(\cdot) := X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$. It is clear that

$$dX(t) = \begin{cases} dX_1(t) + dX_2(t), & \text{if } t \leq \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge T, \\ dX_{3-i}(t), & \text{if } \tau_i \leq \tau_{3-i} \text{ and } \tau_i \wedge T \leq t \\ & \quad \leq \tau_{3-i} \wedge T, i = 1, 2. \end{cases}$$

Hence, $X(\cdot)$ must satisfy the equation

$$\begin{aligned} dX(t) = {} & \{r(t)X(t) + [\mu(t) - r(t)]u(t) - \mathbf{1}_{\{t<\tau_1\}} \\ & \times [c_1(t) + k_1(t) - I_1(t)] \\ & -\mathbf{1}_{\{t<\tau_2\}}[c_2(t) + k_2(t) - I_2(t)]\}\,dt \\ & +\sigma(t)u(t)\,dW(t), \quad t \in [0, (\tau_1 \vee \tau_2) \wedge T], \end{aligned} \tag{2.2}$$

where $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ represents an indicator function and $u(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t)\,\mathbf{1}_{\{t<\tau_i\}}$.

Problem formulation

- 最优化问题如下：
- 效用函数

$$X(\tau_i) = X(\tau_i -) + \frac{k_i(\tau_i)}{\eta_i(\tau_i)}.$$

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, x > 0, \ \gamma < 1.$$

- 控制变量及取值范围

$$\pi(\cdot) := (c_1(\cdot), c_2(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot), u(\cdot))$$

$$\mathcal{A} := \Big\{ \pi(\cdot) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \pi(\cdot) \text{ is } \mathbb{F}-\text{measurable and}$$
$$\mathsf{E}\int_0^T u^2(t)\,dt < \infty,$$
$$\mathsf{E}\int_0^T |c_i(t)|\,dt < \infty, \ \mathsf{E}\int_0^T |k_i(t)|\,dt < \infty, \ i = 1, 2 \Big\}.$$

$$\begin{aligned} J(t, x; \pi(\cdot)) = \mathsf{E}_t \Bigg[& \int_t^{\tau_1 \wedge T} w_1 e^{-\delta s} U(c_1(s))\,ds \\ & + \int_t^{\tau_2 \wedge T} w_2 e^{-\delta s} U(c_2(s))\,ds \\ & + w_3 \mathbf{1}_{\{\tau_1 \vee \tau_2 \le T\}} e^{-\delta(\tau_1 \vee \tau_2)} \\ & \times U\left(X(\tau_1 \vee \tau_2) + \sum_{i=1}^{2} \frac{k_i(\tau_i)}{\eta_i(\tau_i)} \mathbf{1}_{\{\tau_i = \tau_1 \vee \tau_2\}} \right) \\ & + w_4 \mathbf{1}_{\{\tau_1 \vee \tau_2 > T\}} e^{-\delta T} U(X(T)) \Bigg], \end{aligned} \tag{2.3}$$

where $U(\cdot)$ denotes the utility function and $w_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ satisfying $\sum_{i=1}^4 w_i = 1$ are constants reflecting the relative importance of one utility type with respect to another. The value function can, therefore, be defined as

$$V(t, x) = \max_{\pi \in \mathcal{A}} J(t, x; \pi(\cdot)).$$

决策时间/对象	同代人（夫妻）	隔代人（父子/父女）
退休前开始决策	6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)	3. LIFE ANNUITY INSURANCE VERSUS SELF-ANNUITIZATION: ANANAL YSISFROM THEPERSPECTIVE OF THE FAMILY（Schme-iser and Post， 2005） 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family?（Post & Gründl, 2006）
退休后开始决策	1.JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999） 2.Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）	5. Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard （Zweifel，2020）

第二部分

两代人——代际关系模型

- 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family? (2006)
- In comparing an immediate life annuity with a payout-equivalent investment fund payout plan (self-annuitization), research to date has focused mainly on shortfall probabilities of self-annuitization. As an exception, Schmeiser and Post (2005) propose a family strategy where the chances of self-annuitization (i.e., bequests) are taken into consideration as well. In such a family strategy, potential heirs must bear shortfall risks, but in return have a chance of receiving a bequest. This paper analyzes under which conditions heirs will be willing to agree to a family strategy. The idea of a family strategy is integrated into a realistically calibrated intertemporal expected utility framework, taking into account risks arising from stochastic life span, asset returns, and nontradable labor income. A family strategy is shown to be accepted for many parameter combinations, especially in families with low marginal tax rates, if the heirs are wealthy, or in a case where the retiree has an average population life expectancy. We also work out how family self-annuitization decisions interact with asset allocation, saving decisions, and labor income risk. Under realistic conditions our results support two explanations for the empirically observable low demand for annuities (the so-called annuity puzzle), namely intra-family risk sharing and high cost of market-annuitization.

Introduction

- 考虑个体在面对长寿风险时的两种选择：the purchase of an immediate life annuity or self-annuitization。
- self-annuitization退休人员将其资金投资于投资基金，并定期提取资金以满足需要。这使退休人员在消费方面具有更大的灵活性，但也使退休人员可能会面临个人长寿风险。
- 文献主要关注自年金化策略的短缺风险，并表明在固定支付年金的情况下，有可能使风险最小化，但不能完全消除。这就意味着总存在人还没死，钱先花光了的风险。一方面，退休人员可能因寿命超过预期和/或共同投资基金业绩不佳（当韭菜）而没有足够的资金支持生活（短缺风险）。另一方面，退休人员可能会留下大量财富（做梦）

参考文献

- Schmeiser和Post(2005)认为，个体无法为自我年金化与市场年金化决策提供足够的信息。与传统的终身年金相比，自我年金策略创造了一个机会，如果一个退休人员没有活得比他的钱长，那么他就有机会留下财富。然而，追求自我年金化策略的退休人员将不得不承担短缺风险，因此可以考虑继承人（会因为这笔财富）愿意承担这个风险。
- Schmeiser和Post(2005)提出了一种新的家族策略，即继承人承担机会和风险。这一策略的出发点在于退休人员没有把钱投资在保险公司的年金上，而是有了第二种选择。他将这笔钱交给他的继承人，由继承人将其投资于一个投资基金，并产生与保险公司相同的支出流。在这种家庭策略中，未来的继承人必须承担在退休人员有生之年资金耗尽的风险。然而，与市场保险不同的是，投资者仍有机会继承一部分投资资金。家庭还可以节省逆向选择的成本(假设家庭内部信息对称)和交易成本(假设家庭内部有一定程度的相互信任和诚实)(Kotlikoff和Spivak，1981)。

Introduction

- 本文提出的家庭策略与Schmeiser和Post(2005)所描述的类似，
- 起点是一个退休的人，他担心自己未来的财务状况，因为他不知道自己能活多久。他被赋予了一定数量的财富，他打算用这些财富去投资（当韭菜）。为此目的，他考虑了两种选择：
- 第一种选择很简单：他将自己的钱存入保险公司，作为回报，他将获得一份终身年金。
  第二种选择是家庭战略：退休人员将自己的钱交给继承人，继承人承诺支付相当于终身年金的款项。为了保证这些支付，继承人必须存入足够规模的抵押品，这意味着这一策略只有在继承人拥有至少一定数量的财富的情况下才会奏效。
- 继承人的目标是使其一生消费的预期效用最大化。如果他拒绝提供养老金，他就会无法得到遗产。提供养老金的风险则来自于退休人员可能活得比想象的还长，因此继承人自己的财产将会减少。如果退休人员的寿命出人意料地长，或者资本市场发展不佳，就可能发生这种情况
- 继承人的优化问题考虑了来自资产回报、劳动收入、他自己的寿命以及退休人员的寿命。除决定是否提供终身年金外，继承人的决策变量还包括其投资组合的资产配置和其未来每一年的消费/储蓄

The model framework

- 在本节中，将继承人的决策问题归结到一个离散时间的跨期消费/储蓄-期望效用框架中。在下文中，时间是用年来衡量的，所有货币价值均以名义值和税后值列示。继承人在他剩余的生命周期中最大化消费的效用，并使用跨时间可分的效用函数U(C)，形式如下:

$$U(C)=\sum_{t=0}^{T-x}\delta^t U_t\left(C_t\right)$$

- T表示最大寿命，x表示当前年龄，δ表示主观折扣因子。假设没有遗赠动机，则效用函数为:

$$U_t\left(C_t\right)=\begin{cases}\log\left(\frac{C_t}{(1+\pi)^t}\right), & \text{with } \gamma=1\\ \frac{\left(\frac{C_t}{(1+\pi)^t}\right)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 其中，γ表示constant relative risk aversion；Ct代表t时刻的名义消费，并根据通货膨胀率π进行调整。

The model framework

在每个时间点，继承人必须决定消费多少(这决定了他的储蓄)和如何投资剩余的储蓄(通过选择的资产配置)。继承人拥有初始财富W_0，也被称为“cash on hand”(Deaton 1991)。如果继承人决定参与家庭策略，他手头的现金将由于退休人员转移的保险费P增加。作为回报，他必须每年向退休人员支付一份年金A(每年年底支付)，只要退休人员还活着。

储蓄S_t分配给无风险投资和风险投资。每一时期风险投资的比例αt，获得风险回报Rt，其余(1-αt)以复利获得无风险回报R_f。

我们假设继承人不能借钱或卖空股票。只能获得劳动收入Lt，指从年龄x到64岁的继承人每年年底获得的收入。此外，为了保证退休人员在家庭策略下至少和在保险公司的年金计划下一样富裕，无风险投资的部分$(1-\alpha)S_t$被要求至少要和抵押品(col_t)一样大

继承人必须决定他是否要参与家族战略。在进行最优决策时，继承人必须考虑使期望效用最大化.他选择提供最高期望效用的替代方案。因此，继承人决定提供年金时的最大化问题为:

$$\max_{\alpha_t, C_t} \mathrm{E}_0(U(C))$$

消费受到以下限制:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= W_0 + P - S_0 \\
C_t &= \underbrace{S_{t-1}\left(1-\alpha_{t-1}\right)R_f + S_{t-1}\alpha_{t-1}R_{t-1} - A_{t-1} + L_{t-1}}_{W_t} - S_t \\
&\forall t \in \{1, 2, \ldots, T-x\}
\end{aligned}
$$

。

受借款/抵押品规模限制:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{col}_0 \leq S_0 \leq W_0 + P \\
&\mathrm{col}_t \leq S_t \leq W_t \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, T-x\}
\end{aligned}
$$

受担保投资约束

$$
\mathrm{col}_t \leq S_t\left(1-\alpha_t\right) \quad \forall t \in \{0, 1, \ldots, T-x\}
$$

并受到禁止卖空的限制:

$$
0 \leq \alpha_t \leq 1
$$

W_t代表t时刻持有的现金。A_t等于退休人员的年金支出，死亡则为0。

通过将P, A_t, col_t设置为0，得到了不带家庭策略的最大化问题

The model framework

- 表1总结了使用的基本参数配置

Table 1 Base Parameter Configuration

Parameter		Value
Age of the retiree		65
Insurance premium	P	300,000 €
Collateral at $t=0$	col_0	395,777 €
Annual annuity payment	A	20,514 €
Age of the heir	x	45
Maximum lifespan	T	121
Mortality		Population average
Relative risk aversion	γ	2
Subjective discount factor	δ	0.97
Marginal tax rate		0%
Inflation	π	0.0263
Log-normal stock return	R_t	
Expected return	$\mathrm{E}(R_t)$	1.1502
Standard deviation of return	$\mathrm{Std}(R_t)$	0.3157
Risk-free return	R_f	1.0481
Log-normal labor income	L_t	
Initial value of the heir's income profile		30,000 €
Expected income	$\mathrm{E}(L_t)$	Life-cycle-income profile
Unemployment probability		1%
Unemployment/welfare benefits	L_t^u	$8{,}000\,€ \cdot (1+\pi)^t$
Standard deviation when not unemployed	$\mathrm{Std}(L_t^e)$	20%

The model framework

- solving technique

最优化问题采用随机动态规划逆向求解。这个问题的Bellman方程依赖于三个状态变量：时间t，cash on handW_t，退休者的生存状态（a=alive，d=dead）；用$p_t^h(p_t^r)$代表继承者（退休者）从t时刻生存到t+1时刻的概率，Bellman方程(用v表示价值函数)由下式给出：

t=0，1，…，T-x-1

$$V_t^d(W_t) = \max_{\alpha_t, C_t}\left\{U_t(C_t) + p_t^h \delta \mathrm{E}_t\left(V_{t+1}^d(W_{t+1})\right)\right\}$$

subject to constraints $(4)-(7)$, if the retiree is dead, and

$$V_t^a(W_t) = \max_{\alpha_t, C_t}\left\{U_t(C_t) + p_t^h \delta\left[p_t^r \mathrm{E}_t\left(V_{t+1}^a(W_{t+1})\right) + (1-p_t^r)\mathrm{E}_t\left(V_{t+1}^d(W_{t+1})\right)\right]\right\}$$

subject to constraints (4)–(7), if the retiree is alive.

在最后一个时期，剩余的财富被消费，价值函数由$U_{T-x}(W_{T-x})$。

The model framework

- solving technique

Bellman方程(8)和(9)不能用解析方法求解，因此采用了数值方法。基本算法操作如下。

First, at each point in time t the W_t-state space is discretized into $I \in \mathbb{N}$ points W_t^i with $i = 1, 2, \ldots, I$. The upper and lower bounds of this W_t^i-grid were chosen to be nonbinding in all periods.

Since in the last period, i.e., at $t = T - x$, the value function $V_{T-x}\left(W_{T-x}\right)$ is given by $U_{T-x}\left(W_{T-x}\right)$, the numerical solution algorithm starts at the penultimate period, i.e., at $t = T - x - 1$. The Bellman equations (8) and (9) are solved for each W_t^i using the Mathematica implemented nonlinear optimizer NMaximize. For each W_t^i this yields the optimal decisions $\alpha_t^i\left(W_t^i\right), C_t^i\left(W_t^i\right)$ and the function value of $V_t\left(W_t^i\right)$.

Next, a continuous function is fitted to the points $V_t\left(W_t^i\right)$ which delivers a continuous approximation of the value function $V_t\left(W_t\right)$. Finally, the problem is rolled back to the preceding period.

result

- 继承人通过比较两种选择的预期效用来决定是否参与家庭战略。
- 效用的差异可以用家庭策略的welfare gain（或loss）表示。对于不同数量的初始财富W_0，计算结果如图1所示

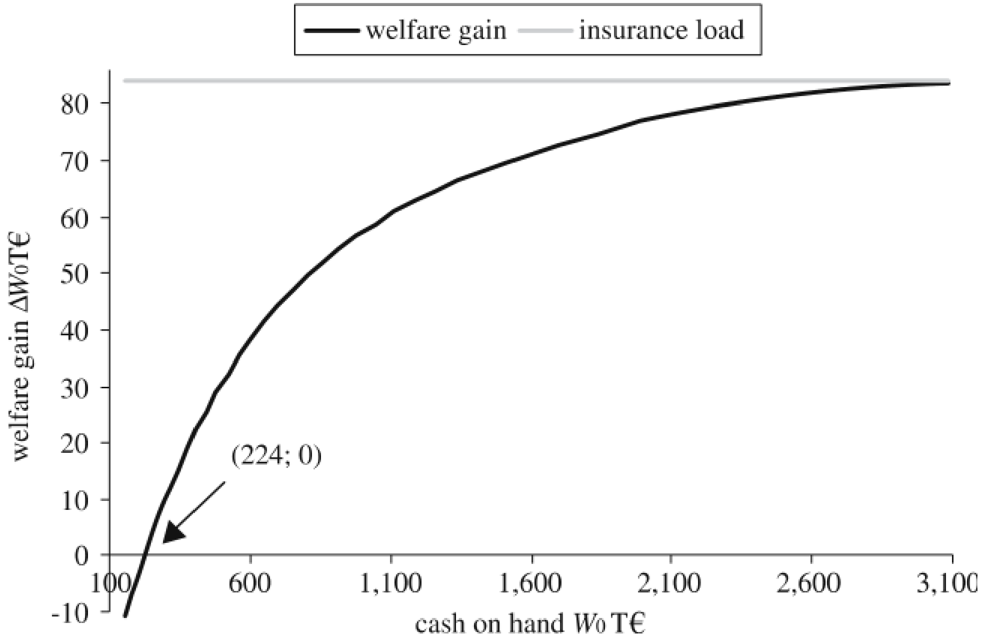


Fig. 1 The family strategy's welfare gain ΔW_0 of the heir in Thousand € (T€)

result

- 下面，我们将讨论在最优化过程中得出的一些最优储蓄/消费和资产配置决策。
- 图2中显示了t=0时的最佳投资决策。

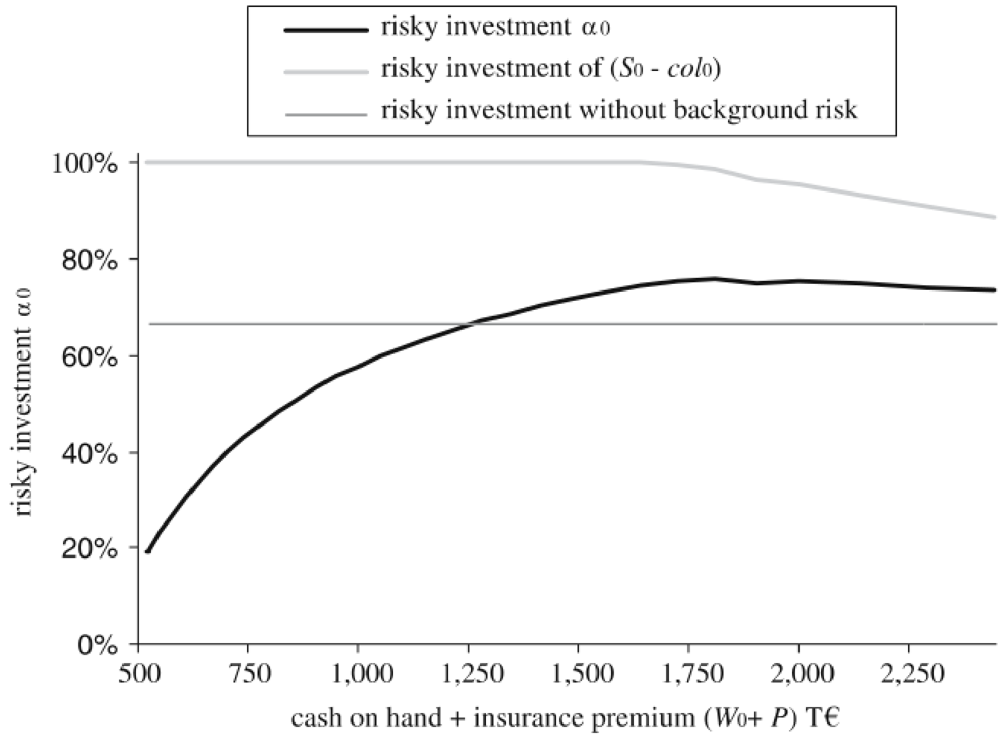


Fig. 2 Optimal decisions of the heir at $t = 0$ when participating in the family strategy: asset allocation α_0

result

- 在下图3中，我们展示了t=0时的最佳储蓄决策。

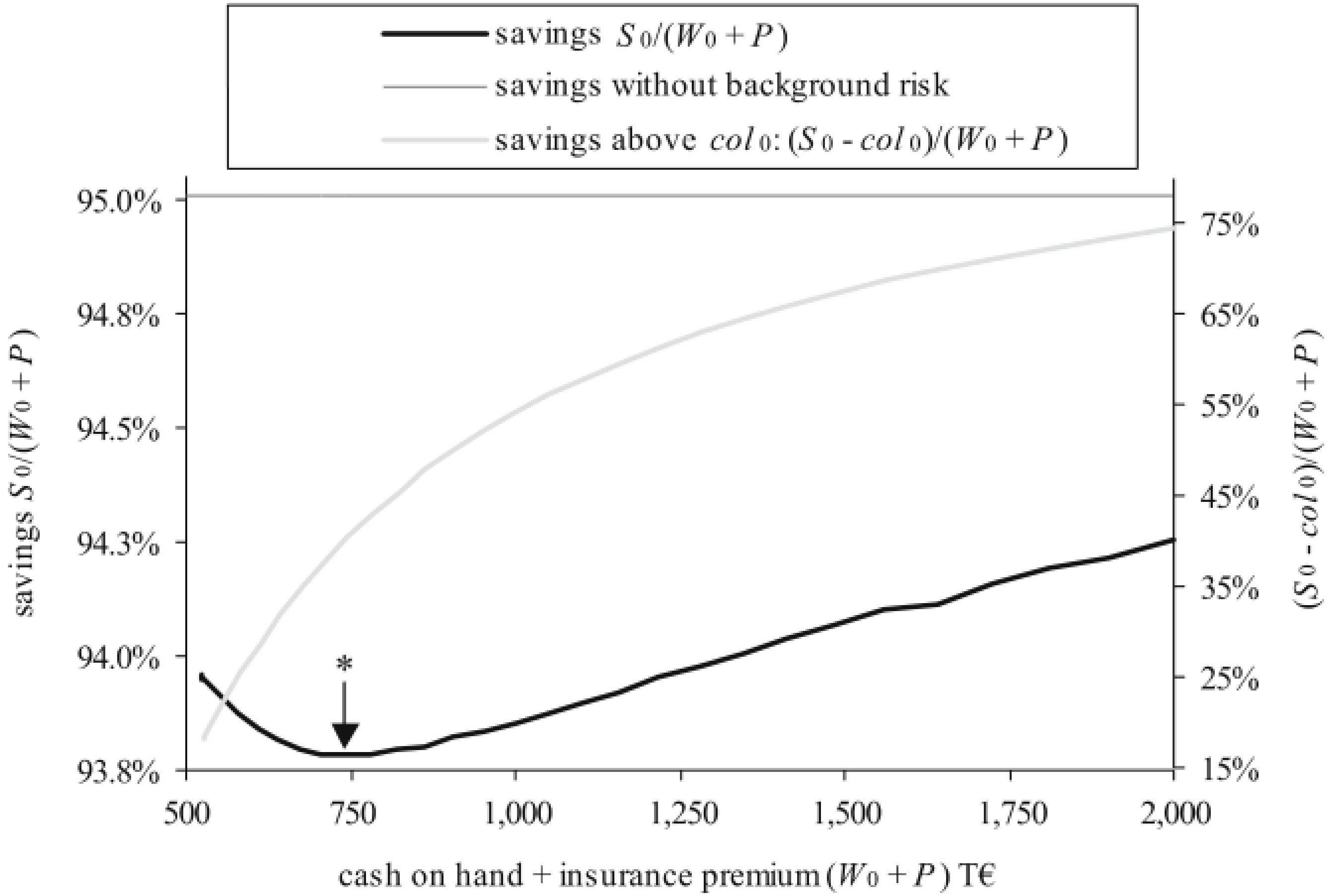


Fig. 3 Optimal decisions of the heir at $t=0$ when participating in the family strategy: savings S_0

后续发展

- 后续研究的创新主要体现在利率假设、死亡率假设、金融市场的完善等
- Kwak（2011年）研究了投资、消费和人寿保险购买的可能策略，该家庭由一名工薪阶层（父母）和一名受抚养人（子女）组成。受抚养人只有在被保险人过早死亡时才能领取保险金。
- Han和Hung（2017）通过结合随机利率和通货膨胀过程，为一个由一名工薪族和一名受抚养人组成的家庭制定了最佳个人消费、投资和人寿保险购买策略。
- Pliska和Ye（2007年）、Ye（2007年）、Kraft和Steffensen（2008年）、Kwak等人（2009年）、Pirvu和Zhang（2012年）、Park和Jang（2014年）、Kwak和Lim（2014年）后续也都进行了类似的研究

决策时间/对象	同代人（夫妻）	隔代人（父子/父女）
退休前开始决策	6. Optimal consumption–investment and life-insurance purchase strategy for couples with correlated lifetimes (Jiaqin Wei,2021)	3. LIFE ANNUITY INSURANCE VERSUS SELF-ANNUITIZATION: ANANAL YSISFROM THEPERSPECTIVE OF THE FAMILY（Schmeiser and Post， 2005） 4. Portfolio management and retirement: what is the best arrangement for a family?（Post & Gründl, 2006） 5. Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard （Zweifel，2020）
退休后开始决策	1.JOINT LIFE ANNUITIES AND ANNUITY DEMAND BY MARRIED COUPLES（Brown & Poterba，1999） 2.Demand for life annuities from married couples with a bequest motive （CARLOS，2006）	

Abstract

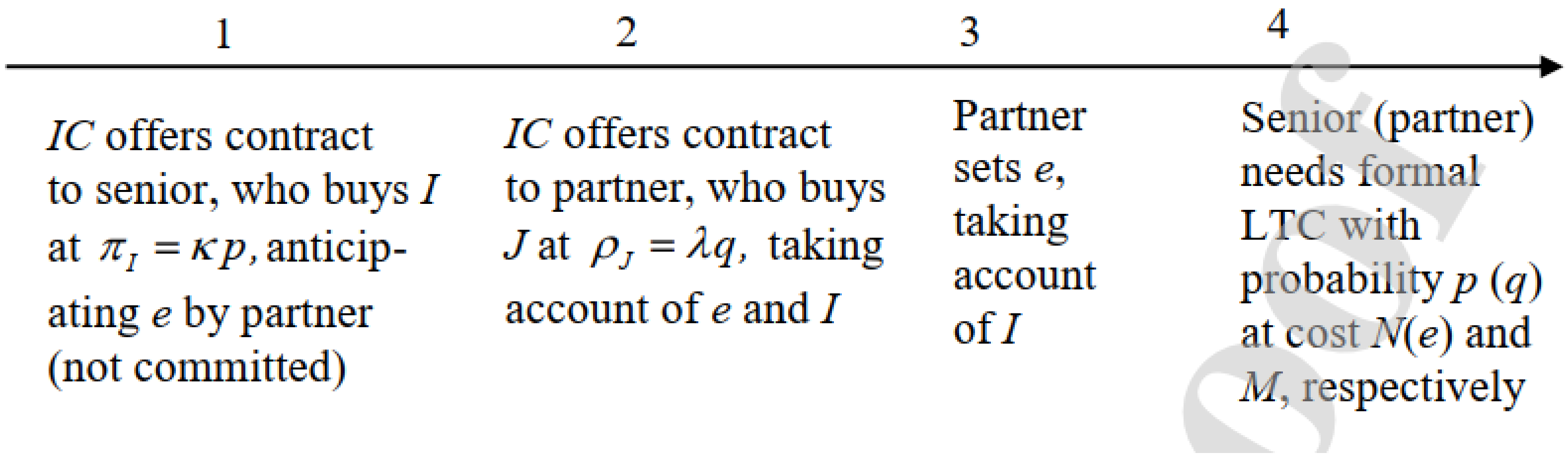
- Innovation in long-term care insurance: Joint contracts for mitigating relational moral hazard 长期护理保险的创新: 缓解关系型道德风险的联合保单合同

- 自从 Pauly (1970)的开创性贡献以来，**道德风险效应一直被怀疑是导致长期护理(LTC)保险市场发展缓慢的原因。**家庭内道德风险被怀疑是导致私人长期保险发展缓慢的原因。。**对孩子而言，道德风险的影响是由于父母购买了更多的长期保险而减少提供非正式护理; 对父母而言，道德风险的影响是购买较少的保险，期望孩子提供非正式护理来减少(甚至避免)正规长期保险服务的支出**

- **联合 LTC 保单可能是一个重要的创新，本文**模拟了两个相关个体之间的互动关系，他们各自独立地考虑购买长期保险。**剩余寿命较短的人将被称为“Senior”，而剩余寿命较长的人可能提供非正式照顾的人将被称为“Partner”**(配偶、家庭成员或亲密朋友)。由于联合的LTC保险保单使senior和partner同时决定，而不是顺序决定，它可能缓解RMH 效应，

- 考虑一个Senior和一个剩余寿命更长的partner，该partner有权获得senior的遗产。 根据财富定义的拥有属性依赖状态的 VNM 效用函数**（期望效用函数）**，二者都可以防范未来需要 LTC 的风险。两个参与者可以在相同或者不同的时间点独立地购买 LTC 保险

- 下图描绘了包括四个不同时点的时间线。在period 1，保险公司（IC）向senior提供LTC保险（通常是人寿保险的附加条款）



第四部分

当前研究方向

研究方向的变化

- 研究内容变化
- 退休后--->退休前
- 父子、父女（抚养关系）<--->夫妻（婚姻关系）
- 年金--->资产管理，考虑住房（反抵押贷款）、健康（长期护理保险）

- 假设变化
- 相关性假设：从假设两个个体独立，到用统计学方法研究个体的相关性
- 利率假设：从固定利率到随机利率
- 死亡率假设：从生命表到死亡率模型的推广

- 方法变化
- 离散模型到连续模型
- 最优化方法的进展

后续研究框架

- 基于**长寿**（和健康）风险的**家庭**资产配置和风险管理

（1）效用函数：既考虑同代个体间的影响（复合效用函数），又考虑代际关系（两代人都需要做出决策）

- 中国式家庭的养老（2+2+2）：复杂家庭模式问题
- 三胎问题：继承人数量

（2）模型假设

- 死亡率&失能率假设：考虑从退休前的决策过程（对养老问题的重视）
- （随机利率模型）（失业模型）

（3）相关性假设

- 死亡的相关性研究：copula
- 失能的相关性研究：从假设独立开始

中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

感谢聆听，希望老师批评指正